

14 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

14.1. Показательные неравенства

Методы решений показательных неравенств:

1. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($\leq, >, \geq$), то:

а) при условии, что $a > 1$ получим $f(x) < g(x)$;

б) при условии, что $0 < a < 1$ получим $f(x) > g(x)$.

2. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < g(x)$, то:

а) при $a > 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) < \log_a g(x)$;

б) при $a > 1$ и $g(x) < 0$ получим $x \in \emptyset$;

в) при $0 < a < 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) > \log_a g(x)$;

г) при $0 < a < 1$ и $g(x) < 0$ получим $x \in \emptyset$.

3. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} > g(x)$, то:

а) при $a > 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) > \log_a g(x)$;

б) при $a > 0$ и $g(x) < 0$ получим $x \in D(f)$;

в) при $0 < a < 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) < \log_a g(x)$.

14.2. Показательно-степенные неравенства

Приведем алгоритм решения показательно-степенного неравенства вида $(f(x))^{g(x)} < (f(x))^{\varphi(x)}$ ($>, \leq, \geq$):

1. Запишем неравенство в виде $(f(x))^{g(x)} - (f(x))^{\varphi(x)} < 0$ и рассмотрим функцию $F(x) = (f(x))^{g(x)} - (f(x))^{\varphi(x)}$.

2. Найдем область определения функции.

3. Найдем нули функции, решая уравнения:

1) $g(x) = \varphi(x)$, причем $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$;

2) $f(x) = 1$;

3) $f(x) = 0$.

4. Нанесем нули функции на ее область определения и применим метод интервалов.

14.3. Логарифмические неравенства

Методы решений логарифмических неравенств:

1. Если неравенство имеет вид $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ ($<, >, \geq$), то

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда:

а) при условии, что $a > 1$, получим $f(x) \leq g(x)$;

б) при условии, что $0 < a < 1$, получим $f(x) \geq g(x)$.

2. Если неравенство имеет вид $\log_a f(x) < g(x)$, то ОДЗ: $f(x) > 0$. Тогда:

а) при условии, что $a > 1$, получим $f(x) < a^{g(x)}$;

б) при условии, что $0 < a < 1$, получим $f(x) > a^{g(x)}$.

3. Если неравенство имеет вид $\log_{q(x)} f(x) \leq \log_{q(x)} g(x)$, то решать неравенство целесообразно методом интервалов (см. п. 7.1).

Заметим, что показательные и логарифмические неравенства всегда можно решить методом интервалов.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–5):

1. Неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

ПРИ УСЛОВИИ

1) $f(x) < g(x)$;

а) $0 < a < 1$;

2) $f(x) > g(x)$.

б) $a > 0, a \neq 1$;

в) $a > 1$;

г) $a > 0$.

2. Неравенство $a^{f(x)} < g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

ПРИ УСЛОВИИ

(ЕГО РЕШЕНИЕ)

1) $f(x) < \log_a g(x)$;

а) $a > 1, g(x) > 0$;

2) $f(x) > \log_a g(x)$;

б) $a > 0, a \neq 1, g(x) < 0$;

3) $x \in \emptyset$.

в) $a < 1, g(x) < 0$;

г) $a > 0, g(x) > 0$;

д) $0 < a < 1, g(x) > 0$.

3. Неравенство $a^{f(x)} > g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО
(ЕГО РЕШЕНИЕ)

- 1) $f(x) > \log_a g(x)$;
- 2) $f(x) < \log_a g(x)$;
- 3) $x \in D(f)$.

ПРИ УСЛОВИИ

- а) $a > 1, g(x) > 0$;
- б) $a > 0, g(x) > 0$;
- в) $a > 0, g(x) < 0$;
- г) $0 < a < 1, g(x) > 0$;
- д) $0 < a < 1, g(x) < 0$.

4. Неравенство $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ
НЕРАВЕНСТВО

- 1) $f(x) \leq g(x)$;
- 2) $f(x) \geq g(x)$.

ПРИ УСЛОВИИ

- а) $a > 1, \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- б) $a > 1, \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- в) $0 < a < 1, \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- г) $0 < a < 1, \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

5. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ
НЕРАВЕНСТВО

- 1) $f(x) < a^{g(x)}$;
- 2) $f(x) > a^{g(x)}$.

ПРИ УСЛОВИИ

- а) $0 < a < 1, g(x) > 0$;
- б) $0 < a < 1, f(x) > 0$;
- в) $a > 1, g(x) > 0$;
- г) $a > 1, f(x) > 0$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5
Вариант правильного ответа	1 - в, 2 - а	1 - а, 2 - д, 3 - б	1 - а, 2 - г, 3 - в	1 - б, 2 - в	1 - г, 2 - б

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $2^{1-2x-1} < 0,125$.

Решение. Запишем неравенство в виде $2^{1-2x-\frac{1}{2}} < 2^{-3}$. Поскольку $2 > 1$, то получим:

$$1-2x < 3, \quad 2x > 4, \quad 2x > 2^2, \quad \frac{1}{x} > 2, \quad \frac{1-2x}{x} > 0.$$

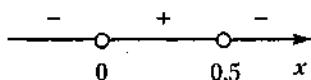


Рис. 14.1

Согласно рисунку 14.1 решением неравенства является промежуток $(0; 0,5)$.

Ответ: $(0; 0,5)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(0, (7) \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-2x} \geq 1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $0, (7) \frac{x^2-2x}{x^2} \geq 0, (7)^0$. Поскольку $0, (7) < 1$, то получим $\frac{x(x-2)}{x^2} \leq 0$.

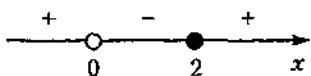


Рис. 14.2

Согласно рисунку 14.2 решением неравенства является промежуток $(0; 2]$.

Ответ: $(0; 2]$.

Пример 3. Определите число целых решений неравенства

$$(0,5)^{x^2-4x-5} \leq 3^{-x^2+4x+5}$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$.

Разделим обе его части на $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$ и получим $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq 1$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^0$. Так как основание степени $\frac{3}{2} > 1$, то показательное неравенство равносильно степенному неравенству $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.

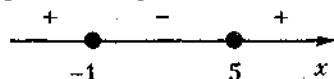


Рис. 14.3

Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 14.3) и получим $x \in [-1; 5]$.

Отрезку $[-1; 5]$ принадлежит 7 целых решений неравенства:

$$-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

Ответ: 7.

Пример 4. Решите неравенство $5^2(\sqrt{2})^{2x} - 10^x + 5^x > 25$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$25 \cdot 2^x - 2^x \cdot 5^x + 5^x - 25 > 0$$

и разложим его левую часть на множители.

Получим неравенство $2^x(25 - 5^x) - (25 - 5^x) > 0$ или неравенство $(25 - 5^x) \cdot (2^x - 1) > 0$, которое решим методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = (25 - 5^x) \cdot (2^x - 1)$.

2. $D(f): x \in \mathbf{R}$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $(25 - 5^x)(2^x - 1) = 0$, равносильное совокупности уравнений $5^x = 25$, откуда $x = 2$ и $2^x = 1$, откуда $x = 0$.

4. Нанесем числа 0 и 2 на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.4).

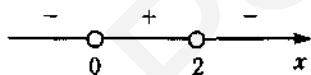


Рис. 14.4

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x) = (25 - 5^x) \cdot (2^x - 1)$ положительна, следовательно, $x \in (0; 2)$.

Ответ: $(0; 2)$.

Пример 5. Решите неравенство $0,5^{2\sqrt{x}+1} + 1 > 1,5 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$0,5^{2\sqrt{x}} + 2 - 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}} > 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = 0,5^{2\sqrt{x}} + 2 - 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$.

2. $D(f): x \geq 0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение

$$0,5^{2\sqrt{x}} - 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}} + 2 = 0.$$

Получим: $0,5^{\sqrt{x}} = 1$, откуда $x = 0$ и $0,5^{\sqrt{x}} = 2$, откуда $2^{-\sqrt{x}} = 2$, $\sqrt{x} = -1$ и $x \in \emptyset$.

4. Нанесем число 0 на область определения функции и установим ее знак на полученном промежутке (рис. 14.5).

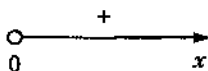


Рис. 14.5

5. Поскольку функция $f(x) = 0,5^{2\sqrt{x}} + 2 - 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$ положительна на промежутке $(0; +\infty)$, то решением неравенства является этот промежуток.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > \ln e$.

Решение. Имеем показательно-степенное неравенство, которое запишем в виде $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} - 1 > 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = (4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} - 1$.

2. $D(f): x \in \mathbf{R}$.

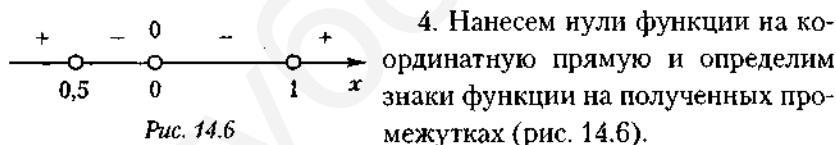
3. Найдем нули функции, решая уравнение:

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} = (4x^2 + 2x + 1)^0$$

а) $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

б) $4x^2 + 2x + 1 = 1$, $x(2x + 1) = 0$, откуда $x_3 = 0$, $x_4 = -0,5$;

в) $4x^2 + 2x + 1 = 0$; откуда $x \in \emptyset$.



4. Нанесем нули функции на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.6).

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x) = (4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} - 1$ положительна:

$$x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$.

Пример 7. Найдите решение неравенства

$$\log_{\lg 9}(8 - x) > \log_{\lg 9}(x + 4)(2x - 3)^{-1}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 8 - x > 0, \\ \frac{x + 4}{2x - 3} > 0 \end{cases}$

Найдем ОДЗ неравенства. Поскольку решением первого неравенства является промежуток $(-\infty; 8)$, то второе неравенство системы решим на этом промежутке методом интервалов. Согласно рисунку 14.7 запишем: $x \in (-\infty; -4) \cup (1,5; 8)$.

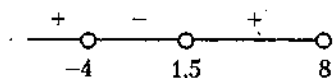


Рис. 14.7

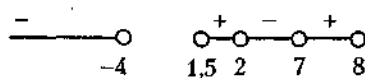


Рис. 14.8

Рассмотрим исходное неравенство. Так как основание логарифмов $\lg 9 < 1$, то найдем решение равносильного ему неравенства:

$$8 - x < \frac{x+4}{2x-3}, \frac{16x-2x^2-24+3x-x-4}{2x-3} < 0, \frac{-2x^2+18x-28}{2x-3} < 0, \\ \frac{x^2-9x+14}{2x-3} > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов на ОДЗ исходного неравенства (рис. 14.8) и получим: $x \in (1,5; 2) \cup (7; 8)$.

Ответ: $(1,5; 2) \cup (7; 8)$.

Пример 8. Найдите середину промежутка, на котором выполняется неравенство $\log_{\pi}(x+27) + \log_{\frac{1}{\pi}}(16-2x) < \log_{\pi} x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+27 > 0, \\ 16-2x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -27, \\ x < 8, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 8).$

Применяя формулу 12.5, получим $\log_{\pi} \frac{x+27}{16-2x} < \log_{\pi} x$. Поскольку основание логарифма $\pi > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x+27}{16-2x} < x, \frac{x+27-16x+2x^2}{16-2x} < 0, \frac{2x^2-15x+27}{16-2x} < 0$.

Решение этого неравенства показано на рисунке 14.9: $x \in (3; 4,5)$.

Найдем середину интервала

$$(3; 4,5): \frac{3+4,5}{2} = 3,75.$$

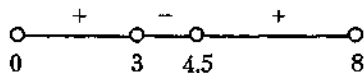


Рис. 14.9

Ответ: 3,75.

Пример 9. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$2^{-1} + \log_9 x - \log_3(5x) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3).$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -3, \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Применяя свойства логарифмов, запишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} \log_{3^2} x - \log_3(5x) - \log_{3^{-1}}(x+3) &> -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \log_3 x - \log_3(5x) + \\ + \log_3(x+3) &> -\frac{1}{2}, \quad \log_3 x - \log_3(5x)^2 + \log_3(x+3)^2 > -1, \\ \log_3 \frac{x(x+3)^2}{25x^2} &> -1. \end{aligned}$$

Поскольку основание логарифма $3 > 1$, то по определению логарифма получим $\frac{(x+3)^2}{25x} > 3^{-1}$, а так как $x > 0$, то запишем $x^2 + 6x + 9 > \frac{25x}{3}$ и $3x^2 - 7x + 27 > 0$. Заметим, что это неравенство выполняется для всех действительных значений x , а значит выполняется и на ОДЗ исходного неравенства, следовательно, $x \in (0; +\infty)$. Число 1 – наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: 1.

Пример 10. Решите неравенство

$$\log_3(\log_2(2 - \log_4 x) - 1) < \log_4 4.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 2 - \log_4 x > 0, \\ \log_2(2 - \log_4 x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_4 x < 2, \\ 2 - \log_2 x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 16, \\ x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1).$$

Найдем решение неравенства. Применяя определение логарифма, получим: $\log_2(2 - \log_4 x) - 1 < 3$, $\log_2(2 - \log_4 x) < 4$, $2 - \log_4 x < 16$, $\log_4 x > -14$, $x > 4^{-14}$, $x > 2^{-28}$. Учитывая ОДЗ неравенства, запишем его решение: $x \in (2^{-28}; 1)$.

Ответ: $(2^{-28}; 1)$.

Пример 11. Найдите наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x-1|} 0,5 - 0,5 > 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \log_{|x-1|} 0,5 - 0,5$.

$$2. D(f): \begin{cases} |x-1| > 0, \\ |x-1| \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} \neq 1, \\ x_3 \neq 0, x_4 \neq 2. \end{cases}$$

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{|x-1|} 0,5 = 0,5$, откуда $0,5 = |x-1|^{\frac{1}{2}}$, $|x-1| = 0,25$. Тогда $x-1 = 0,25$ или $x-1 = -0,25$, а $x = 1,25$ или $x = 0,75$.

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.10).

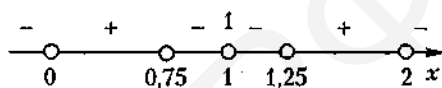


Рис. 14.10

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x) = \log_{|x-1|} 0,5 - 0,5$ положительна: $x \in (0; 0,75) \cup (1,25; 2)$. Число 1 – наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$.

Ответ: 1.

Пример 12. Найдите среднее арифметическое всех целых решений неравенства $2^{-1} \lg^2(x+6) \geq 2^{-1} \lg(x+6) \lg x + \lg^2 x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+6 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Запишем неравенство в виде $\lg^2(x+6) - \lg(x+6) \lg x - 2 \lg^2 x \geq 0$ и решим его методом интервалов. По теореме Виета найдем нули функции:

$$f(\lg(x+6)) = \lg^2(x+6) - \lg(x+6) \lg x - 2 \lg^2 x.$$

$$\text{Запишем } \begin{cases} \lg(x+6) = 2 \lg x; \\ \lg(x+6) = -\lg x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 = x^2, \\ x+6 = \frac{1}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x^2 + 6 - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, x = 3, \\ x = -3 \pm \sqrt{10}. \end{cases}$$

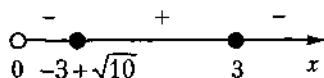


Рис. 14.11

Нанесем полученные числа на ОДЗ неравенства (рис. 14.11) и запишем его решение: $[-3+\sqrt{10}; 3]$.

Запишем целые решения неравенства: 1; 2; 3. Найдем среднее арифметическое этих решений: $(1+2+3):3=2$.

Ответ: 2.

Пример 13. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > \log_{\sqrt{2}} 2$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} - 2 > 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} - 2$.

2. $D(f): x > 0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} = 2$. Возводя обе части уравнения дважды в квадрат, получим $x^{\log_2 x^{\frac{1}{2}}} = 2^2$, $x^{\frac{1}{2} \log_2 x} = 2^2$, $x^{\log_2 x} = 2^4$. Полагая $\log_2 x = a$, а $x = 2^a$, запишем $(2^a)^a = 2^4$, $2^{a^2} = 2^4$. Тогда $a^2 = 4$ и $a = \pm 2$. В таком случае $x_1 = 2^2 = 4$ и $x_2 = 2^{-2} = 0,25$.



Рис. 14.12

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.12).

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x) = \sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} - 2$ положительна: $(0; 0,25) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $(0; 0,25) \cup (4; +\infty)$.

Пример 14. Найдите область определения функции

$$y = \log_3(2^{\log_3 x - 3^{0,5}} - \log_3 3) + \frac{\log_3 3}{\log_3(2x-6)}.$$

Решение. Найдем область определения функции, решая систе-

$$\text{му ограничений } \begin{cases} x-3 > 0, x-3 \neq 1, \\ 2^{\log_{x-3} 0,5} - 1 > 0, \\ 2x-6 > 0, \\ \log_3(2x-6) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ x \neq 3,5, \\ \log_{x-3} 0,5 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства $\log_{x-3} 0,5 > 0$ на промежутках $(3; 3,5)$, $(3,5; 4)$ и $(4; +\infty)$.

Поскольку функция $f(x) = \log_{x-3} 0,5$ нулей не имеет, то установим ее знаки на указанных промежутках (рис. 14.13).

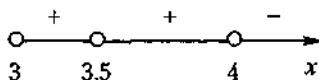


Рис. 14.13

Согласно рисунку 14.13 решением системы неравенств являются промежутки, на которых функция $f(x) = \log_{x-3} 0,5$ положительна: $x \in (3; 3,5) \cup (3,5; 4)$.

Ответ: $(3; 3,5) \cup (3,5; 4)$.

Пример 15. Найдите решение неравенства

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7) + \log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}} \geq \log_{x-3} 1.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7) + \log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}} - \log_{x-3} 1 \geq 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7) + \log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}} - \log_{x-3} 1.$$

$$2. D(f): \begin{cases} 2x-7 > 0, \\ x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1, \\ 9-x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3,5, \\ x > 3, \\ x \neq 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3,5; 4) \cup (4; 9).$$

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2x-7) + \log_3(x-3) = 0$, $\log_3(x-3) = \log_3(2x-7)$, $x-3 = 2x-7$, $x = 4$.

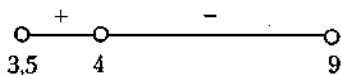


Рис. 14.14

4. Поскольку значение $x = 4$ не принадлежит области определения функции, то установим знаки функции на ее области определения (рис. 14.14).

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x) = \frac{\log_1(2x-7) + \log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}} - \log_{x-3} 1$ не отрицательна: $x \in (3,5; 4)$.

Ответ: (3,5; 4).

Пример 16. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x+2|^{\log_2(3+x)} \geq (-x-2)^8.$$

Решение. Поскольку $(-x-2)^8 = |x+2|^8$, то запишем неравенство в виде $|x+2|^{2\log_2(3+x)} - |x+2|^8 \leq 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = |x+2|^{2\log_2(3+x)} - |x+2|^8$.

2. $D(f): x > -3$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $|x+2|^{2\log_2(3+x)} = |x+2|^8$:

1) $\log_2(3+x) = 4$, откуда $3+x = 2^4$ и $x = 13$;

2) $|x+2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1, \\ x+2=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x=-3; \end{cases}$

3) $x+2=0$, откуда $x=-2$. Проверка: подставляя значение $x=-2$ в уравнение $|x+2|^{2\log_2(3+x)} = |x+2|^8$, получим $0^0 = 0^8$. Поскольку получили неопределенность вида 0^0 , то $x \neq -2$.

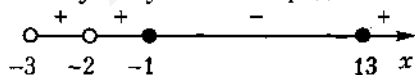


Рис. 14.15

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.15).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x) = |x+2|^{2\log_2(3+x)} - |x+2|^8$ не отрицательна:

на: $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [13; +\infty)$. Число -1 – наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: -1 .

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–37):

1. $49^{0,5x^2-2x-1} - 7^{-2} > 0$. 2. $(\sqrt{0,5})^{(x^2+x-2)(6-2x)} > (\sqrt{0,25})^0$.

3. $0,09^{x^2-1,5x+3} < 243 \cdot 10^{-5}$. 4. $-0,64 < -\sqrt{10^{-4} \cdot 2^{3x(x-3)}} < -0,64^0 \cdot 10^{-2}$.

5. $1^{|x^2-x|} < 3^{|x-x^2|} < 9$. 6. $2^{2x} - 2^{2(x-1)} + \sqrt[3]{8}^{2(x-2)} > 52$.

7. $5^{x+1} + 2^{x+3} + 2^{x+4} < 5^{x+2} + 2^{x+2}$.

8. $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} - 3^{\sqrt{4}} < 2$. 9. $25^{x+0,5} - \sqrt{5}^{2x} > 4$.

10. $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$.

11. $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 3^{2\sqrt[4]{x} + 2} - 3^{2\sqrt{x}} \geq 0$.

12. $\left(\frac{1}{x}\right)^{8+3x} > \left(\frac{1}{x}\right)^{-7}$.

13. $|x-3|^{2x^2-7x} > 1^{x+3}$.

14. $(x^2+x+1)^{\frac{3x+15}{x+2}} - (x^2+x+1)^9 \geq 0$.

15. $\log_{2^{-1}} 2(3+x) - \log_{\frac{1}{2}}(x+8) > 0$.

16. $\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < -2 \log_5 \sqrt[6]{5}$.

17. $\lg 6x^{-1} > \lg(x+5)$.

18. $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < \log_5 1$.

19. $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < \ln e$.

20. $6 \log_8(x-2) + 3 \log_{\frac{1}{8}}(x-3) - 2 > 0$.

21. $2 \log_9 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x - 6 < 0$.

22. $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x < 0$.

23. $\log_{2x}(x-2)(x-3) - 1 < 0$.

24. $\log_{2^{-1}} \log_2 2 \log_{x^{-1}} 3 > 0$.

25. $\frac{(1-2x)(1+2x)}{\log_{1,7}(2^{-1} \cdot (1-\log_7 3))} \geq 0$.

26. $\frac{2 \log_{25}(x^2+3)}{x^2-4} < 0$.

27. $(0,4)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 5 \cdot 2^{-1}$.

28. $4^{0,5 \log_{0,4} x \cdot \log_{0,4}(2,5x)} > x^0$.

29. $0,09^{\frac{2^{-1} \cdot \log_4 3 \log_2 \frac{x+2}{x^2+2}}{3}} > 1$.

30. $\lg x - 0,5(\lg x)^2 < 0$.

31. $\frac{1 + \log_{0,25} x}{1 - \log_{0,5} x} \leq 0,5$.

$$32. x^{\frac{1}{\log_{0,3} 2}} + 0,3^{\log_{0,2} x} - 2 \cdot (0,3)^2 \leq 0. \quad 33. \log_2 \log_{\frac{1}{3}} x > \log_6 6.$$

$$34. \frac{x^2}{\log_{0,3} 2} - \frac{2}{\log_{0,09} 2} > 0. \quad 35. x^{0,5 \log_{0,5} x - 3} \geq 2^{2,5 \log_{0,5} x - 3}.$$

$$36. (\sqrt{x})^{2 \log_2 x} + 16x^{\log_{0,5} x} - 17 < 0. \quad 37. 5^{\log_2^2 x} + x^{\log_5 x} - 5^2 < 0.$$

Найдите область определения функций (38–43):

$$38. y = 2\sqrt{|x-3| - |8-x|} + 2. \quad 39. y = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3 |x-4|} + 4x - x^2.$$

$$40. y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3|} + \log_3 (x-3)^2.$$

$$41. y = \sqrt{\log_{0,5}^2 (x-3) - 1} + \sqrt{x-3}.$$

$$42. y = \sqrt[4]{2 - \lg |2-x|} + \sqrt[4]{(x-2)^4}.$$

$$43. y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-4)}} - 1 + \log_8^{-1} (x-4).$$

Решите системы неравенств (44–46):

$$44. \begin{cases} \frac{1}{2-x} \geq 1, \\ 2 \cdot 4^{2x} \geq 32^x. \end{cases} \quad 45. \begin{cases} \frac{x^2+4}{16x-x^2-64} < 0, \\ \lg \sqrt{x+7} + \lg 4 > \lg (x-5). \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} (1,5)^{-x} \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{54}{128}, \\ 2^{x^2-6x-6,5} - \sqrt{2} < 0. \end{cases}$$

47. Найдите сумму длин промежутков, которые образуют решения системы неравенств $1 < 2^{x(x+2)} < 8$.

48. Найдите сумму квадратов целых решений системы неравенств $\left(\frac{5}{3}\right)^{-13x^2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{5}{3}\right)^{-12x^2}$.

49. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,3} (3x-8) > -\log_{\frac{10}{3}} (4+x^2).$$

50. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \log_{\frac{1}{3}} x\right) > -1$.

51. Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых реше-

ний неравенства $\frac{\log_3(x+1)}{2\log_3 10 + \log_1 \frac{9}{3}} < 1$.

52. Найдите количество целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 9\log_2 \frac{32}{x^2} < 4\log_{0,5}^2 x.$$

- Ответы:** 1. $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. 2. $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$. 3. $(-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$. 4. $(-1; 0) \cup (3; 4)$. 5. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$. 6. $(3; +\infty)$. 7. $(0; +\infty)$. 8. $[0; 4)$. 9. $(0; +\infty)$. 10. $(0; 1)$. 11. $[0; 16]$. 12. $(0; 1)$. 13. $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3,5) \cup (4; +\infty)$. 14. $(-2; -1] \cup [-0,5; 0)$. 15. $(-3; 2)$. 16. $(2; 3)$. 17. $(0; 1)$. 18. $(4; 6)$. 19. $(2; +\infty)$. 20. $(3; 4) \cup (4; +\infty)$. 21. $(0; 27)$. 22. $(1; \sqrt[3]{5})$. 23. $(0; 0,5) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$. 24. $(4; 10)$. 25. $(-\infty; -0,5] \cup [0,5; +\infty)$. 26. $(0; 4)$. 27. $[1; 4]$. 28. $(0; 0,4) \cup (1; +\infty)$. 29. $(-0,5; 2)$. 30. $(0; 1) \cup (100; +\infty)$. 31. $(0; 0,5) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. 32. $(0; 0,04]$. 33. $(1; \sqrt{3})$. 34. $(-2; 2)$. 35. $[0,125; 4]$. 36. $(0,25; 1) \cup (1; 4)$. 37. $(0,2; 5)$. 38. $[5,5; +\infty)$. 39. $[0; 3) \cup (3; 4)$. 40. $[0; 2) \cup (4; 6]$. 41. $(3; 3,5] \cup [5; +\infty)$. 42. $[-98; 2) \cup (2; 102]$. 43. $(4; 5) \cup (5; +\infty)$. 44. 1. 45. $(5; 8) \cup (8; 29)$. 46. $(-1; 3)$. 47. 2. 48. 26. 49. 3. 50. 1,5. 51. 10. 52. 3.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов	
1	Наименьшее неотрицательное решение неравенства $2^x + 2^{ x } - 2^{\frac{3}{2}} \geq 0$ равно	1) 0; 3) 0,5; 5) 3.	2) 0,2; 4) 1;
2	Середина промежутка, который образуют решения неравенства $5^2 \cdot 2^x - 10^x + (\sqrt{5})^{2x} - 5^2 > 0$, равна	1) 2; 3) 0,5; 5) 1.	2) 1,5; 4) 5;

№	Задания	Варианты ответов
3	Наименьшее целое решение неравенства $(x-2)^{x^2-6x+8} - 1 > 0$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) 4; 5) -4.
4	Сумма длин промежутков, которые образуют решения неравенства $3^{2\sqrt{x^2-3}+1} + 9 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}$, равна	1) $2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; 3) 1; 4) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$; 5) $2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$.
5	Сумма целых решений неравенства $ 3-x ^{x^2+7x+12} \leq 1$ равна	1) 5; 2) 2; 3) 6,6; 4) 10; 5) 15.
6	Длина промежутка, который образуют решения неравенства $(5+\sqrt{24})^x + (5-\sqrt{24})^x \leq 10$, равна	1) 1; 2) 3,5; 3) 6; 4) 2; 5) 3.
7	Сумма целых решение неравенства $\log_2 \left(0,5 \log_{\sqrt{2}} 2 - \log_9 x + \log_{\frac{1}{9}} x \right) < 1$ равна	1) 3; 2) 5; 3) -5; 4) 4; 5) 7.
8	Множество решений неравенства $\log_{0,5} \left(\log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \right) < 0$ имеет вид	1) (1; 2); 2) (1; $\sqrt[3]{5}$); 3) (0; $\sqrt[3]{15}$); 4) (-5; 1); 5) (1; $+\infty$).
9	Если x_0 - наименьшее целое решение неравенства $\log_{x-3} (x-4) < \log_{\sqrt{x-3}} (x-3)$, то значение $\log_{x_0-3} x_0$ равно	1) $\frac{\lg 5}{1+\lg 2}$; 2) $\ln 5 + 1$; 3) $\frac{\lg 15}{\lg 5}$; 4) 5; 5) $\frac{\lg 5}{1-\lg 5}$.

№	Задания	Варианты ответов
10	Найдите середину интервала, который образуют решения неравенства $\log_{4x}(x^2 - x - 2) > \log_{4x}(3 + 2x - x^2)$	1) 2,5; 2) 4; 3) 2,75; 4) 1; 5) 3.
11	Среднее арифметическое целых решение неравенства $\frac{\lg^2(3-x) + \sqrt{x-1}}{\lg^2 x - \lg 10} < 0$ равно	1) 1,5; 2) 3; 3) 1; 4) 2; 5) 6.
12	Число целых решений неравенства $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < (\sqrt{5})^{\log_5 100}$ равно	1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
13	Сумма целых решений неравенства $\log_{x^2} \frac{4x-5}{ 2-x } \geq \log_{x^2} x$ равна	1) 8; 2) 11; 3) 12; 4) 14; 5) 24.
14	Неравенство $a^{-1} \cdot 2^{2x} - 2^x - 1 \leq -3a^{-1}$ имеет хотя бы одно решение при условии, что	1) $a \geq 2$; 2) $a > 1$; 3) $a \in \mathbf{R}$; 4) $1 < a < 7$; 5) $3 \leq a \leq 4$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	3	5	3	5	2	4	1
Номер задания	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	2	5	3	1	2	3	1